



TITLE:

Mautner群の既約表現について (群の表現と調和解析)

AUTHOR(S):

河上, 哲

CITATION:

河上, 哲. Mautner群の既約表現について (群の表現と調和解析). 数理解析研究所講究録 1979, 368: 204-223

ISSUE DATE:

1979-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104630>

RIGHT:

Mautner 群の既約表現について

阪大 基礎工 河上 哲

§ 1. 序

discrete Mautner 群や Mautner 群等の非 I 型群の既約表現を決定する事は、一般に絶望的とされているし、具体的に知られている表現はごくわずかである。Mackey の方法によつて誘導表現として得られる既約表現 ("Mackey 表現" と呼ばれている) や、正則表現の分解の際に顔を出す non-Mackey 表現等についてはよく知られている。最近、L. Baggett が、表現のテンサー積の概念を群拡大と関連づけて一般化し、そのテンサー積を分解する事によつて、discrete Mautner 群の新しい既約表現を見出した。[1] ここでは、その表現の正体を明らかにし、ある種の non-Mackey 表現達の構成を試みると共に、更に新しい既約表現を索す事を主目的とする。

§ 2. discrete Mautner 群の既約表現

discrete Mautner 群とは、 \mathbb{C} (複素数加群) と \mathbb{Z} (整数加群) の半直積群 $\mathbb{D} = \mathbb{C} \rtimes \mathbb{Z}$ であり、積は

$$(z, n)(z', n') = (z + e^{in} z', n + n')$$

と定義されている。この \mathbb{D} のよく知られた non-Mackey 表現とは、次のような表現である。

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{T} = \{ \alpha \in \mathbb{C} ; |\alpha| = 1 \} \quad \text{で}$$

$$\mathcal{H}_g = L^2(\mathbb{T}) \ni f(\alpha), \quad \mathbb{D} \ni (z, n) \quad \text{に対し、}$$

$$(U_{(z, n)}^{(\lambda, r)} f)(\alpha) = e^{i\lambda n} e^{i(r\alpha, z)} f(\alpha e^{in})$$

但し、 $(,)$ は \mathbb{C} の実内積

この表現に対し、一つ解釈を与えてみる。まず G_g を \mathbb{C} と \mathbb{R} の半直積群 $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{R}$ とし、積が

$$(z, t)(z', t') = (z + e^{it} z', t + t')$$

と定義される群を考える。これは、運動群の普遍被覆群で、3次元可解リー群である。この群 G_g の既約表現は、Mackey の方法で求まる。 $\widehat{\mathbb{C}} \ni \varphi \neq 0$ に対し、その不変部分群は、 $H_\varphi = \{ t \in \mathbb{R} ; t \cdot \varphi = \varphi \} = 2\pi\mathbb{Z}$ であり、 $\widehat{H}_\varphi \ni \chi$ を 1 つとって、 $G_{g, \varphi} = \mathbb{C} \rtimes H_\varphi$ の表現 $\mathcal{L}^{(\chi, \varphi)}$ を、

$$\mathcal{L}_{(z, h)}^{(\chi, \varphi)} = \varphi(z) \chi(h) \quad (z, h) \in \mathbb{C} \rtimes H_\varphi$$

と定め、

$$V^{(\chi, \varphi)} = \text{Ind}_{G_\varphi \uparrow G} L^{(\chi, \varphi)}$$

とおくと、 $V^{(\chi, \varphi)}$ は G の既約表現である。特に

$$\chi^\lambda(h) = e^{i\lambda h}, \quad \varphi^r(z) = e^{i(r\bar{\alpha}, z)} \quad r \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}$$

をとると、 $V^{(\lambda, r)} \equiv V^{(\chi^\lambda, \varphi^r)}$ は、

$$h_f = L^2(\mathbb{T}) \ni f(\alpha) \text{ に対し、}$$

$$(V_{(z, t)}^{(\lambda, r)} f)(\alpha) = e^{i\lambda t} e^{i(r\bar{\alpha}, z)} f(\alpha e^{it}) \quad (z, t) \in G$$

となっている。ここで自然に D を G の部分群と思うと、 D の表現 $U^{(\lambda, r)}$ は、 G の表現 $V^{(\lambda, r)}$ の D への制限になっている。

$$\text{つまり、} \quad U^{(\lambda, r)} = \left. V^{(\lambda, r)} \right|_D = \left. \text{Ind}_{G_\varphi \uparrow G} L^{(\chi^\lambda, \varphi^r)} \right|_D$$

と、解釈できる。 $U^{(\lambda, r)}$ の既約性は、両側 coset $D \backslash G / G_\varphi$ が、countably separated でない事により、その可能性が伺われる。([2] 参照)

次に、L. Baggett の得た新しい表現というのは、次のような non-Mackey 表現である。([1] 参照)

$$\lambda \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+, d \in \mathbb{Z}, \quad h_f = L^2(\mathbb{T}) \ni f(\alpha) \text{ に対し、}$$

$$(U_{(z, n)}^{(\lambda, d, r)} f)(\alpha) = e^{i\frac{d}{2}n^2} e^{i\lambda n} \alpha^{nd} e^{i(r\bar{\alpha}, z)} f(\alpha e^{in})$$

ここで、 $\mathbb{T} \longleftrightarrow [0, 2\pi)$ のボレル同型により、書き直すと、

$L^2([0, 2\pi)) \ni f(x)$ に対し、

$$\left(\mathcal{U}_{(\mathbb{Z}, n)}^{(\lambda, d, r)} f \right)(x) = e^{in^2 \frac{d}{2}} e^{inx} e^{i\lambda n} e^{i(re^{-ix}, \mathbb{Z})} f(\overline{x+n})$$

となる。但し、 $x \in \mathbb{R}$ において、 $x = [x] + \overline{x}$; $[x] \in 2\pi\mathbb{Z}$,

$0 \leq \overline{x} < 2\pi$ と表わす。前記 $\mathcal{U}^{(\lambda, r)}$ と異なっている点は、

$D^d(n, x) = e^{i\frac{d}{2}n^2} e^{inx}$ の項が、余分についている。今、

x を実数の範囲で取ってさしつかえない。その時、 $D^d(n, x)$

は、 $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ から \mathbb{T} へのボレル関数であって、

$$D^d(n, x+2\pi m) = D^d(n, x) \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

を満たす。更に、 $A^d(x) = e^{-i\frac{d}{2}x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$) をとると、

$$D^d(n, x) = A^d(x) \overline{A^d(x+n)}$$

と表わされ、この事から容易に、

$$D^d(n_1+n_2, x) = D^d(n_1, x) D^d(n_2, x+n_1)$$

の関係式を満たす事が判る。次に、

$$\begin{aligned} C^d(2\pi m, x) &= \overline{A^d(x)} A^d(x+2\pi m) \quad m \in \mathbb{Z} \\ &= e^{i\frac{d}{2}(2\pi m)^2} e^{2\pi i m x} \end{aligned}$$

と書いてみると、やはり、

$$\begin{cases} C^d(2\pi m, x+n) = C^d(2\pi m, x) & \forall n \in \mathbb{Z} \\ C^d(2\pi m_1+2\pi m_2, x) = C^d(2\pi m_1, x) C^d(2\pi m_2, x+2\pi m_1) \end{cases}$$

を満たしている事に注意しておこう。ここで、

$$\tilde{C}^d((z, 2\pi m), (w, t)) \equiv C^d(2\pi m, t) \quad \text{とおく.}$$

そこで、 $G_\varphi = \mathbb{C} \times_{\mathbb{S}} 2\pi\mathbb{Z}$ の表現 $\mathcal{L}^{(\alpha^*, \varphi^*)}$ と、変換群 $(G_\varphi; G)$ の \mathbb{D} -不変 cocycle $\tilde{C}^d(k, g)$ を用いると、 \mathbb{D} の表現 $\tilde{U}^{(\lambda, d, r)}$ は、次に定義される表現 $\tilde{U}^{(\lambda, d, r)}$ とユニタリ-同値である事が容易に判る。 $\tilde{\mathcal{H}}$ を、次の条件を満たす f 達の集まりから作られるヒルベルト空間とする。

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} f \text{ は、} G \text{ 上のボレル関数} \\ \textcircled{2} f(k \cdot g) = \tilde{C}^d(k, g)^* \mathcal{L}_k^{(\alpha^*, \varphi^*)} f(g) \quad k \in G_\varphi, g \in G \\ \textcircled{3} \int_{G/G} |f(g)|^2 d\mu(g) < \infty \quad \left(\begin{array}{l} \text{但し、} \mu \text{ は } G/G \cong 2\pi\mathbb{m} \backslash \mathbb{R} \\ \text{のハール測度} \end{array} \right) \end{array} \right.$$

この時、 $(z, n) \in \mathbb{D}$ に対し、

$$\tilde{U}_{(z, n)}^{(\lambda, d, r)} : \tilde{\mathcal{H}} \ni f(g) \longmapsto f(g \cdot (z, n)) \in \tilde{\mathcal{H}}$$

は、 \mathbb{D} のユニタリ-表現になる。

この定義から、 $d=0$ 即ち $C^d \equiv 1$ の時は、確かに $\mathcal{L}^{(\alpha^*, \varphi^*)}$ の G への誘導表現を \mathbb{D} に制限した表現になっている事に注意しておこう。以後の § で、この表現の若干の一般論を述べる。

§3. 変換群のコホモロジー

以下の位相群 G が位相空間は、可算基を持つ局所コンパクトとする。今、位相変換群 $(G; X)$ と、フォンノイマン環 \mathcal{O}

が与えられている時、 G, X にはその位相から自然にボレル構造が入り、一方、 $\mathcal{U} = \{\mathcal{U} \text{ のユニタリー作用素全体} \}$ も、弱作用素位相から生成されるボレル構造を備えているとする。その時、

$$C(g_1 g_2, x) = C(g_1, x) C(g_2, x \cdot g_1) \quad g_1, g_2 \in G, x \in X$$

を満たす、 $G \times X$ から \mathcal{U} へのボレル関数 $C(g, x)$ を、 \mathcal{U} -値 *cocycle* と呼んでおく。二つの *cocycle* C_1 と C_2 が、 X 上の \mathcal{U} -値ボレル関数 A によって、

$$C_2(g, x) = A(x)^* C_1(g, x) A(x \cdot g)$$

の関係を満たす時、 C_1 と C_2 は *cohomologous*、あるいは同値と言う。特に恒等的に 1 である *cocycle* と *cohomologous* の時、*coboundary* と呼ぶ。 $\mathcal{H}_n(G; X)$ で \mathcal{U} -値 *cocycle* 全体の同値類を表わし、 \mathcal{U} -値コホモロジー類と呼ぶ。特に \mathcal{U} が可換の場合、これは自然な演算で群構造を持つ。一方、位相変換群 $(G; X)$ において、そのすべての軌道が局所閉集合である時、“smooth” と呼ぶ。この定義と同値な条件は、数多く知られており、I 型性と密接に関連した重要な概念である。([4] 参照)

命題 1. 位相変換群 $(G; X)$ が smooth でかつ効果的であれば、 $\mathcal{H}_n(G; X)$ は自明。[6]

つまり、効果的な $(G; X)$ においては、smooth であれば、

本質的には、cocycleは顔を出さない。効果的という条件をはずせば、一般には極めて難しく、単純な場合には、次の命題が成立する。

命題2 $(G; X)$ が推移的かつ $\Omega = \mathbb{C}$ ならば、 $\mathcal{H}_c(G; X)$ は、 $\mathcal{X}(G_0) = \{G_0 \text{ の 1 次表現全体} \}$ と、群として同型。但し、 G_0 は G の不変部分群。

尚、 $(G; X)$ が smooth でない場合が本題だが、ここでは、これに代わり、両側変換群 $(G; Y; H)$ を考える。より正確に述べると、効果的だが non-smooth な $(G; X)$ に対し、次の条件を満足する両側変換群 $(G; Y; H)$ を見出す。

$$\begin{cases} (G; X) \cong (G; Y/H) \\ (G; Y) \text{ と } (H; Y) \text{ は効果的かつ smooth} \end{cases}$$

この時、命題1の恩恵により、 (G, X) の cocycle $D(g, x)$ は、 Y 上の Ω^n -値ボレル関数 $A(y)$ を使って、

$$D(g, y) = A(y) A(g \cdot y)^* \quad g \in G, y \in Y$$

と、表わされ、かつ

$$D(g, y \cdot h) = D(g, y) \quad \forall h \in H$$

つまり、 H -不変な $(G; Y)$ の cocycle として、とらえる事が出来る。一方、

$$C(h, y) = A(y)^* A(y \cdot h)$$

とみると、これは G -不変な $(H; Y)$ の *cocycle* になっている。
 実際、 $D \longleftrightarrow A \longleftrightarrow C$ は、コホモロジー群 (Ω が可換の場合) の同型を与えている。 ([6] 参照)

[注意1] X に正の測度 μ が与えられている時は、測度に依存したコホモロジーを定義する必要がある。ここでは、*cocycle* は上記のままで、同値の条件を、

$$\forall g \in G; C_2(g, x) = \overline{A(x)} C_1(g, x) A(g \cdot x) \quad \mu\text{-a.a. } x$$

と変更した時に、 $C_1 \sim_{\mu} C_2$ と記し、そのコホモロジー類を $\mathcal{H}_{\Omega}^{\mu}(G; X)$ と表わす事にする。

[注意2] 両側変換群の典型的な例は、1つの群 G に、2つの部分群 Γ 及び H が与えられると、右と左からそれぞれ掛けるという作用で、自然に定まる。

[例1] $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$, $H = 2\pi\mathbb{Z}$ とし、

$$\begin{cases} G \text{ の作用} & m \cdot x = x + m & x \in X, m \in G \\ H \text{ の作用} & x \cdot (2\pi n) = x + 2\pi n & x \in X, 2\pi n \in H \text{ の時} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} A^{\lambda}(x) = e^{-i\lambda x} \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ をとると、}$$

$$\begin{cases} C^{\lambda}(2\pi m, x) = e^{-2\pi i \lambda m} & (G\text{-不変}) \\ D^{\lambda}(n, x) = e^{i\lambda n} & (H\text{-不変}) \end{cases}$$

これは、一次表現を *cocycle* として、とらえてみた。

$$\textcircled{a} \quad A^d(x) = e^{-i\frac{d}{2}x^2} \quad d \in \mathbb{Z} \quad \text{を と る と、}$$

$$\begin{cases} C^d(2\pi m, x) = e^{-2\pi i d m x} e^{-i\frac{d}{2}(2\pi m)^2} & (G\text{-不変}) \\ D^d(n, x) = e^{i\frac{d}{2}n^2} e^{i d n x} \end{cases}$$

$$[\text{例} 2] \quad X = \mathbb{R}^2, \quad G = \mathbb{R}, \quad H = 2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{と し、}$$

$$\begin{cases} G \text{ の 作用} & t \cdot (x, y) = (x+t, y+2\pi t) \\ H \text{ の 作用} & (x, y)(2\pi m, 2\pi n) = (x+2\pi m, y+2\pi n) \end{cases}$$

但し、 $(x, y) \in X$, $t \in G$, $(2\pi m, 2\pi n) \in H$ の時、

$$A^d((x, y)) = e^{-i\frac{d}{2}(x - \frac{1}{2\pi}y)^2} \quad d \in \mathbb{Z} \quad \text{を と る と、}$$

$$\begin{cases} C^d((2\pi m, 2\pi n), (x, y)) = e^{-2\pi i d m (x - \frac{1}{2\pi}y)} e^{-2\pi^2 i d m^2} & (G\text{-不変}) \\ D^d(t, (x, y)) = e^{\frac{d}{2\pi} i x [\bar{y} + 2\pi t]} e^{\frac{d}{8\pi^2} i \{[\bar{y} + 2\pi t] - 2\bar{y}[\bar{y} + 2\pi t]\}^2} \end{cases}$$

(H-不変)

§ 4. 誘導表現の一般化

両側変換群 $(G; X; H)$ において、 H のユニタリー表現 $(L, \rho_g(L))$ と X/H 上の準不変測度 μ が与えられているとしよう。この時、 σ_L を、 $L(H)' = \{T \in B(\rho_g(L)); L_h T = T L_h \quad \forall h \in H\}$ なるフォンノイマン環とし、かつ C を G -不変な $(H; X)$ の σ^n -値 cocycle とする。そこで、 L, C, μ によって、 G の表現 $\pi^{(L, C, \mu)}$ を次のように定める。

まず、 ρ_g は次の条件を満たす子達の集まりから自然に作られるヒルベルト空間とする。

$$\left\{ \begin{array}{l} ① f; X \longrightarrow \mathcal{L}(L) \quad ; \text{弱ボレル関数} \\ ② f(x \cdot h) = C(h, x)^* L_h f(x) \\ ③ \int_{X_H} \|f(x)\|^2 d\mu(x) < \infty \end{array} \right.$$

この時、

$$U^{(L, C, \mu)}: \mathcal{L}_g \ni f(x) \longmapsto \rho(g, x)^{1/2} f(g \cdot x) \in \mathcal{L}_g$$

は、 G のユニタリ表現になる。但し、 $\rho(g, x) = \frac{d\mu_g}{d\mu}(x)$

$\mu_g(E) = \mu(g \cdot E)$ とした。

[注意3] G, H が、ある群 G_0 の部分群である時、 μ は自然に定まる。更に、 $C \equiv 1$ とすると、 $U = \big|_{H \uparrow G} \text{Ind}_H L$ に他ならず、特に、 $G = G_0$ だと、誘導表現になっている。

従って、今後、この定義によって得られる表現 $U^{(L, C, \mu)}$ を

$$U^{(L, C, \mu)} = \text{Ind}_{H \uparrow G}^{\mu} L$$

と書く事にする。尚、この表現の研究は、将来に委ねよう。

§ 5. ある半直積群の表現の構成

$G = N \rtimes K$ (半直積群) とする。但し、 K が N の自己同型群として作用している。これを $N \ni n$ と $K \ni k$ に対し、 $k \cdot n \in N$ と記す。更に N も K も可換である事を仮定しよう。その時、

$$(k \cdot \chi)(n) = \chi(k \cdot n) \quad \chi \in \hat{N}, \quad k \in K, \quad n \in N$$

と約束すれば、 K は \hat{N} (N の dual) に、位相変換群として作用する。G. W. Mackey は、変換群 $(K; \hat{N})$ が smooth の時、 $G = N \rtimes K$ を "regular" な半直積群と呼び、この群の既約表現をすべて決定した。ここでは、主に G が regular でない場合を扱い、その G の non-Mackey 表現の一部を求めてみよう。しかし、次の仮定を設ける。

(*) $G_0 = N \rtimes K$ は、regular な半直積群で、 $G = N \rtimes K$ の G_0 への埋め込みが効くような、可換群 \mathcal{K} を見出す事が出来る。

この時、まず $\hat{N} \ni \varphi$ を 1 つとり、その不変群を $H_\varphi = \{t \in \mathcal{K}; t \cdot \varphi = \varphi\}$ とおく。更に $\hat{H}_\varphi \ni \chi$ をとり、 $G_\varphi = N \rtimes H_\varphi$ の表現 $L^{(\chi, \varphi)}$ を、

$$L^{(\chi, \varphi)}_{(n, h)} = \varphi(n) \chi(h) \quad (n, h) \in G_\varphi$$

で定める。更に、 C を変換群 $(H_\varphi; \mathcal{K})$ の K -不変な \mathbb{I} -値 cocycle とすると、これは自然に $(G_\varphi; G_0)$ の G -不変な cocycle と思える。そして、 μ としては、 \mathcal{K}/H_φ のハール測度をとると、§4 に従い、 G の表現

$$U^{(\chi, C, \varphi)} = \text{Ind}_{G_\varphi \rtimes G} L^{(\chi, \varphi)}$$

が求まる。しかし、ここで、 C と χ は重複を許している為(

つまり χ は 1 つの cocycle と思える) 以下の議論の必要上、
 $\chi=0$ として、 $\mathcal{U}^{(C, \varphi)}$ を考える。更に、 $t \in \mathcal{K}$ に対し、

$$(t \cdot C)(h, x) = C(h, t \cdot x) \quad h \in H_q, x \in \mathcal{K}$$

とおく事で、実は、 $\mathcal{H}_c^\mu(K; \mathcal{K}/H_q)$ に \mathcal{K} の作用が自然に定義できる。この時、次の定理を得る。

定理 3. $\mathcal{U}^{(C, \varphi)}$ と $\mathcal{U}^{(C', \varphi')}$ がユニタリ-同値である為の必要十分条件は、 φ と φ' が同じ \mathcal{K} の軌道に属し、かつ $\varphi' = t \cdot \varphi$ なら ($t \in \mathcal{K}$) $C' \underset{\mu}{\sim} t \cdot C$ である事。

定理 4. $\text{Orb}_{\mathcal{K}}(\varphi)$ が $\text{Orb}_{\mathcal{K}}(\varphi)$ の中で、相対位相により、稠密であれば、 $\mathcal{U}^{(C, \varphi)}$ は既約表現である。

証明は [6] 参照

[注意 4] もし、 $\hat{N} \ni \varphi \neq 0$ に対し、 $\text{Orb}_{\mathcal{K}}(\varphi) = \overline{\text{Orb}_{\mathcal{K}}(\varphi)}$ かつ、
 $H_q \equiv H$ (一定) であれば、既約表現 $\mathcal{U}^{(C, \varphi)}$ は $\mathcal{H}^\mu(K; \mathcal{K}/H) \times (\hat{N} \setminus \{0\})$ への \mathcal{K} の作用による軌道で決定される。これは、discrete Mautner 群 D や Mautner 群 M に対し、有効である。

[注意 5] (*) の仮定が、どの程度強いものか、未だよく判らない。一般に、単連結な可解リー群を代数群 (I 型群) に埋め込む有用性は、Pukanszky [5] に示されている。

§ 6. Mautner 群の既約表現

上記で、 $N = \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{R}$ とした半直積群 $M = \mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{R}$ で、積が、

$$(z, w, t)(z', w', t') = (z + e^{it}z', w + e^{2\pi i t}w', t + t')$$

と定義される群が、Mautner 群と呼ばれている。これは、連結な 5 次元可解リー群で、I 型でない群として有名である。こ

こで、 $G = \mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{R}^2$ で、積が、

$$(z, w, t, u)(z', w', t', u') = (z + e^{it}z', w + e^{iu}w', t + t', u + u')$$

と定義される、6 次元可解リー群も考え、

$$M \ni (z, w, t) \longmapsto (z, w, t, 2\pi t) \in G$$

なる対応で M を G に埋め込み、 G の閉部分群と見なす。あと

は、§ 5 に従って、non-Mackey 表現を求めてみる。

$$\widehat{\mathbb{C}^2} \ni \varphi^{(r, s)} \quad r, s \in \mathbb{R}^+ \quad \varphi_{(z, w)}^{(r, s)} = e^{i(r, z)} e^{i(s, w)}$$

$$\widehat{H}_\varphi \ni \chi^\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \chi_{(2\pi m, 2\pi n)}^\lambda = e^{2\pi i \lambda m}$$

$$L^{(\lambda, r, s)} \equiv L^{(\chi^\lambda, \varphi^{(r, s)})} \quad \text{は } G_\varphi \text{ の表現}$$

$$C^d; (G_\varphi, G) \text{ の } M\text{-不変 cocycle (§ 3, 例 2)}$$

等を用いて、

$$U^{(\lambda, d, r, s)} \equiv \text{Ind}_{G_\varphi \rightarrow G} L^{(\lambda, r, s)}$$

とかく。これを具体的に書き下してみると、次のような表現になっている。

$\mathcal{H} = L^2([0, 2\pi) \times [0, 2\pi)) \ni f(x, y)$ に対し、

$$\left(\bigcup_{(z, w, t)}^{(\lambda, d, r, s)} f \right)(x, y) = e^{i\lambda t} e^{i\frac{d}{2\pi} x [y + 2\pi t]} \\ \times e^{i\frac{d}{8\pi^2} \{ [y + 2\pi t] - 2y [y + 2\pi t]^2 \}} e^{i(r e^{-ix}, z)} e^{i(s e^{-iy}, w)} f(\overline{x+t}, \overline{y+2\pi t})$$

但し、 $\mathbb{R} \ni t$ に対し、 $t = [t] + \overline{t}$; $[t] \in 2\pi\mathbb{Z}$, $0 \leq \overline{t} < 2\pi$ と表わした。(§3. 例2の D^d 参照)

この表現は、L. Baggett が \mathbb{D} で得た表現 (§2) を元に、 \mathbb{D} を \mathcal{M} の部分群とみて、Mackey の方法に従って求めた表現とユニタリ同値になっている。

§7. 具体的なコホモロジー群について、

ここでは、 \mathbb{Z} の \mathbb{T} への作用が

$$n \cdot \alpha = e^{in} \alpha \quad n \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{T}$$

で定まる変換群 (\mathbb{Z}, \mathbb{T}) と、 \mathbb{R} の \mathbb{T}^2 への作用が

$$t \cdot (\alpha, \beta) = (e^{it} \alpha, e^{2\pi i t} \beta) \quad t \in \mathbb{R}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{T}^2$$

で定まる変換群 $(\mathbb{R}, \mathbb{T}^2)$ のコホモロジー群の一部を、求めてみよう。(§3. 例1, 例2 参照) ここで

$$\mathcal{F} = \{ \mathbb{R} \text{ 上の } \mathbb{T}\text{-値ボレル関数で } \mathbb{Z}\text{-不変なもの全体} \}$$

$$\mathcal{F}_0 = \{ b(t) \in \mathcal{F} ; \exists a(t) \in \mathcal{F} \text{ s.t. } b(t) = \overline{a(t)} a(t+2\pi) \text{ a.a. } t \}$$

とおくと、次の命題が成立する。

補題5. $\mathcal{H}_c^A(\mathbb{Z}; \mathbb{I})$ は、可換群として $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$ と同型。

(説明) (\mathbb{Z}, \mathbb{I}) の cocycle を \mathbb{R} 上のボレル関数 $A(x)$ と見なすと、

$$a(x) = \overline{A(x)} A(x+2\pi) \in \mathcal{F}$$

の対応がつく。逆に、 $a \in \mathcal{F}$ に対し、帰納的な手続きで、cocycle が構成できる。

補題6. $E \oplus \mathbb{Z} \subset \mathcal{H}_c^A(\mathbb{Z}; \mathbb{I})$ 部分群として 但し $E = \mathbb{R}/\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$

(証明) $A^{(\lambda, d)}(x) = e^{i(\frac{d}{2}x^2 + \lambda x)}$ ($\lambda \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{Z}$; 例1) のうち、coboundary を決定する。しかし、補題5により、 $a^{(\lambda, d)}(x) = e^{2\pi i(dx + \lambda)}$ が、どんな (λ, d) に対し、 $a^{(\lambda, d)} \in \mathcal{F}_0$ かを求めれば良い。

$$a^{(\lambda, d)} \in \mathcal{F}_0 \iff \exists b \in \mathcal{F} ; a^{(\lambda, d)}(x) = \overline{b(x)} b(x+2\pi) \text{ a.a. } x$$

$$\iff \exists b \in \mathcal{F} ; a^{(\lambda, d)}(x) = \overline{b(x)} b(x+2\pi) \text{ } L^2\text{-norm}$$

但し、 $L^2\text{-norm}$ とは、 \mathbb{Z} -不変な関数 c に対し $\|c\|_2 = \int_0^1 |c(x)|^2 dx$ 。

$$\text{ここで、} b(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n e^{2\pi i n x} \quad L^2\text{-norm}$$

と展開し、これを

$$b(x) a^{(\lambda, d)}(x) = b(x+2\pi)$$

に代入すると、

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n e^{2\pi i \lambda} e^{2\pi i (n+d)x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n e^{2\pi i n \cdot 2\pi} e^{2\pi i n x}$$

係数の一意性より、

$$b_n e^{2\pi i \lambda} = b_{n+d} e^{2\pi i (n+d) 2\pi}$$

を得る。従って、 $|b_n| = |b_{n+d}|$ となるが、もし、 $d \neq 0$ なら

$\|b\|_2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|^2 = 1 < \infty$ に予看する。依、て、少なくとも

$d=0$ である。これを元の式に代入すると、

$$b_n e^{2\pi i \lambda} = b_n e^{2\pi i n \cdot 2\pi}$$

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|^2 = 1$ より、 $b_n \neq 0$ となる n が存在して、

$$e^{2\pi i \lambda} = e^{2\pi i n \cdot 2\pi} \quad \text{即ち、} e^{2\pi i (\lambda - 2\pi n)} = 1$$

を得る。故に $\lambda \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ 。逆に、 $d=0$ 、 $\lambda \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ なら、

$a^{(\lambda, d)} \in \mathcal{F}_0$ は容易に判る。

命題 7. $E \oplus \mathbb{Z} \subset E \oplus \mathbb{Q} \subset \mathcal{H}_c^\mu(\mathbb{Z}; \mathbb{T})$

(証明) $p \in \mathbb{Z}^+$, $q \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し、

$$\tilde{\alpha}^{(q, \frac{p}{r})}(x) = e^{2\pi i (\frac{q}{p}x + \lambda)} \quad 0 \leq x < 1$$

から作られる \mathcal{F} の元を $a^{(\lambda, \frac{q}{p})}$ とする。この時、

$$(a^{(\lambda, \frac{q}{p})})^p = a^{(p\lambda, q)}$$

の関係がある。従、て、もし $a^{(\lambda, \frac{q}{p})} \in \mathcal{F}_0$ なら、 \mathcal{F}_0 が群である

事から、 $a^{(p\lambda, q)} \in \mathcal{F}_0$ となり、補題 6 より、 $q=0$ を得る。

これを、元の式に代入して、 $\lambda \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ を得る。逆は、明らか。

補題 8 $\mathcal{H}_c^\mu(\mathbb{Z}; \mathbb{T})$ は群として、 $\mathcal{H}_c^\nu(\mathbb{R}; \mathbb{T}^2)$ と同型。

(但し、 μ は \mathbb{T} のハール測度、 ν は \mathbb{T}^2 のハール測度)

(説明) 前者の ω cycle を、 \mathbb{R} 上のボレル関数 $A(x)$ として、

とらえた時、

$$\hat{A}((x, y)) = A(x - \frac{1}{2\pi} y) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

の関係で、後者の cocycle \hat{A} を得る。しかも、この対応が、上の同型を与えている。

命題 9. $E \oplus \mathbb{Z} \subset E \oplus \mathbb{Q} \subset \mathcal{H}_c^v(\mathbb{R}; \mathbb{T}^2)$

(証明) 補題 8 と 命題 7 により自明。特に、 $E \oplus \mathbb{Z}$ の具体的な代表元は、§3、例 2 を参照。

§ 8. 結果

定理 3、4 の応用として、命題 7、9 を用いると、discrete Mautner 群 \mathbb{D} と、Mautner 群 M の新しい既約表現 (non-Mackey 表現) が、次のような parametrization として得られる。

\mathbb{D} の表現

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \frac{\delta}{p} \in \mathbb{Q}, \quad r \in \mathbb{R}^+ \quad \text{による } U(\lambda, \frac{\delta}{p}, r)$$

$$U(\lambda, \frac{\delta}{p}, r) \cong U(\lambda', \frac{\delta'}{p'}, r') \iff r' = r, \quad \frac{\delta'}{p'} = \frac{\delta}{p}, \quad \lambda' - \lambda \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$$

M の表現

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \frac{\delta}{p} \in \mathbb{Q}, \quad r, s \in \mathbb{R}^+ \quad \text{による } U(\lambda, \frac{\delta}{p}, r, s)$$

$$U(\lambda, \frac{\delta}{p}, r, s) \cong U(\lambda', \frac{\delta'}{p'}, r', s') \iff r' = r, s' = s, \quad \frac{\delta'}{p'} = \frac{\delta}{p}, \quad \lambda' - \lambda \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$$

$p=1$ の時は、L. Baggett の得た表現になっている。(§2, §6)

§9. 余談

一般に、非 I 型群においては、表現の既約分解が一意的でなくなる現象が知られている。そこで、 \mathbb{D} 及び M の factor 表現の既約分解について研究する為に、とりあえず知られている既約表現について、整理してみた。現段階で判った事は、non-smooth な位相変換群のコホモロジーが十分たくさんある事が、分解の一意的性の破れる原因の一つとして、考えられる。というのは、次の事実が、 \mathbb{D} に関して判った。

$$\pi^r = \int_0^1 \bigoplus U(\lambda, 0, r) d\mu(\lambda) \quad \mu \text{ はルベグ測度}$$

とおくと、 π^r は、 \mathbb{D} の \mathbb{I}_1 -factor 表現であり、かつ、

$$\pi^r = \int_0^1 \bigoplus U(\lambda, \frac{r}{p}, r) d\mu(\lambda) \quad \forall \frac{r}{p} \in \mathbb{D}$$

となっている。もう少し、一般的な記述に直すと、

$\mathbb{D} = \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{Z}}$ において、 $\hat{\mathbb{C}} \ni \varphi \neq 0$ に対し、

$$\pi^\varphi = \left. \text{Ind}_{G_\varphi \rightarrow G} \right|_{\mathbb{D}}, \quad U^{(\alpha, c, \varphi)} = \text{Ind}_{G_\varphi \rightarrow \mathbb{D}} L^{(\alpha, \varphi)} \quad (\S 5 \text{ 参照})$$

($\alpha \in \hat{H}_\varphi$)

をとると、

$$\pi^{\varphi} = \int_{\hat{H}_{\varphi}}^{\oplus} \sigma^{(\alpha, c, \varphi)} d\mu(\alpha) \quad \mu \text{ は } \hat{H}_{\varphi} \text{ の ハール測度}$$

となっている。 $\sigma^{(\alpha, c, \varphi)}$ は、定理4により、既約であり、かつ定理3により、 c が異なる事で、同値でない表現がたくさんでてくる。([7] 参照)

Reference

- [1] L.Baggett; Representations of the Mautner group I, Pacific J.Math., 77,(1978),7-22.
- [2] G.W.Mackey; Induced representations of locally compact groups I, Annals Math.,55,(1952),101-139.
- [3] _____; Induced representations of groups and quantum mechanics; New York-Amsterdam; W.A.Benjamin,(1968).
- [4] E.Effros; Transformation groups and C*-algebras, Ann.of Math.,81,(1965),38-55.
- [5] L.Pukanszky; Characters of connected Lie groups, Acta.Math.,133,(1974),81-137.
- [6] S.Kawakami; Irreducible representations of certain semidirect product groups,(Preprint).
- [7] _____; On the decompositions of some factor representations, (Preprint).